MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 1.
Un joc de calculator se desfășoară după regula următoare: la fiecare rundă, jucătorul alege un număr $a \in \mathbb{N}^*$, după care calculatorul alege la întâmplare un număr $x \in \mathbb{R}$ și dacă $\frac{15-3x}{7} \geq a$ sau $x+25 \geq a$, atunci jucătorul câștigă a puncte.

a) Stabiliți dacă, pentru $a=12$ și $x=-24$, jucătorul câștigă 12 puncte.
b) Demonstrați că pentru alegerea $a=12$ jucătorul poate să nu câștige 12 puncte.
c) Demonstrați că se pot alege numere $a \in \mathbb{N}$ încât la orice $x \in \mathbb{R}$ ales de calculator, jucătorul să câștige a puncte și aflați numărul maxim de puncte pe care le poate câștiga la o rundă a jocului.

<u>**Soluție**</u>:

a) Pentru $a=12$ și $x=-24$, $\frac{15-3x}{7} \geq a$ este adevărată și $x+25 \geq a$ este falsă 1p
deci jucătorul câștigă 12 puncte. 1p

b) $\frac{15-3x}{7} \geq 12 \iff x \leq -23$ și $x+25 \geq a \iff x \geq -13$ 1p
$\Rightarrow x \in \varnothing$ 1p

c) Pentru a câștiga trebuie $x \in \left(-\infty; \frac{15-7a}{3}\right]$ sau $x+25 \geq a \iff x \in [a-25; +\infty)$ 1p
$\Rightarrow$ dacă jucătorul alege $a \in \mathbb{N}^*$ încât $\frac{15-7a}{3} \geq a-25 \iff a \leq 9$, atunci câștigă 1p
și dacă alege $a=9$ cîștigă număr maxim de puncte, respectiv 9 puncte 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 2.

a) Arătați că $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, pentru orice număr $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Determinați numerele naturale nenule x și y, care verifică $\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{y}$.

c) Determinați funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ care pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, verifică relația

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$$

<u>**Soluție**</u>:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$,

sau demonstrare prin inducție 2p

b) $x=\frac{1}{y-1}\in\mathbb{N} \Rightarrow y-1=1 \Rightarrow y=2$ și $x=1$ 2p

c) $n=2 \Rightarrow \frac{1}{f(1)\cdot f(2)}=1-\frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(1)=1,\ f(2)=2$ 1p

și din $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$ și

$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=1-\frac{1}{f(n+1)}$, rezultă

$1-\frac{1}{f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=1-\frac{1}{f(n+1)}$, deci $f(n+1)=1+f(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ 1p

$\Rightarrow f(n)=n$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 3.

Fie triunghiul ABC și punctele M , N și P astfel încât $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

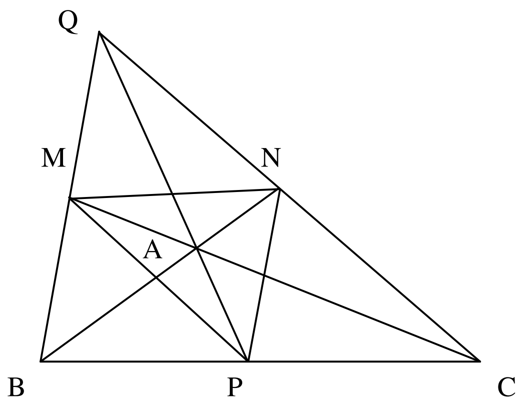
a) Demonstrați că $MN \parallel BC$.

b) Dacă $BM \cap CN=\{Q\}$, demonstrați că A este centrul de greutate al triunghiului QBC și $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{O}$.

c) Demonstrați că triunghiurile QBC și MNP au același centru de greutate.

Soluție:

Conform figurii avem:



a) $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM} \Rightarrow \dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel BC$ 3p

b) $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{1}{2}$, $MN \parallel BC \Rightarrow [MN]$ linie mijlocie în triunghiul $QBC \Rightarrow A$ este centrul de greutate al triunghiului $QBC \Rightarrow \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{O}$ 2p

c) Având A centrul de greutate al triunghiului QBC,

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{O} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ este centrul de greutate și al triunghiului MNP 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 4.

Fie mulțimea tuturor funcțiilor de gradul al doilea, $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma $f_m(x) = x^2 + 2(m-1)x + (1-4m)$, $m \in \mathbb{R}$ și considerăm familia parabolelor asociate acestor funcții.

a) Arătați că există $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1;\, 3)$ este pe parabola asociată funcției f_m.

b) Arătați că există un punct situat pe toate parabolele familiei.

c) Arătați că punctul $B(2;3)$ nu este situat pe nici una din parabolele familiei și determinați mulțimea tuturor punctelor cu această proprietate.

<u>**Soluție**</u>:

a) $f_m(-1) = 3$ 1p

$\Rightarrow\ (-1)^2 + 2(m-1)\cdot(-1) + (1-4m) = 3 \ \Rightarrow\ m = \dfrac{1}{6}$ 1p

b) $P(a;\, b)$ este pe toate parabolele $\Leftrightarrow\ f_m(a) = b$, $(\forall) m \in \mathbb{R}$ 1p

$\Leftrightarrow\ a^2 - 2a + 1 - b = 2m(2-a)$, $(\forall) m \in \mathbb{R}$ 1p

$\Rightarrow\ a = 2$, $b = 1$ și $P(2;\, 1)$ este pe toate parabolele 1p

c) $B(2;3) \in G(f_m)\ \Leftrightarrow\ f_m(2) = 3\ \Leftrightarrow\ 1 = 3$, contradicție, deci $B(2;3)$ nu este pe nici una din parabole 1p

$M(x_0; y_0) \in G(f_m)\ \Leftrightarrow\ f_m(x_0) = y_0\ \Leftrightarrow\ 2m(x_0 - 2) = y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 1$,

deci dacă $x_0 \neq 2$, alegând pentru $m \in \mathbb{R}$ valoarea $m = \dfrac{y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 1}{2(x_0 - 2)}$, obținem $M(x_0; y_0) \in G(f_m)$.

Pentru $x_0 = 2$ avem punctul $P(2;\, 1)$ care este pe toate parabolele familiei și atunci punctele nesituate pe nici o parabolă a familiei sunt punctele $Q(2;\, y)$ cu $y \neq 1$, aceasta deoarece având $f_m(2) = 1$, vom avea $f_m(2) \neq y$ pentru orice $y \neq 1$.

Punctele $Q(2;\, y)$ cu $y \neq 1$ descriu dreapta de ecuație $x = 2$ din care se exclude punctul $P(2;\, 1)$. 1p